Chapitre 13
Oscillations dans un dipôle RLC

$\boxed{13.1}$ À bâtons rompus

a. Vrai ou faux ? Dans un circuit RLC, si on quadruple la valeur de L, la pseudo-période des oscillations sera multipliée par quatre.

b. Vrai ou faux ? Le dispositif qui entretient les oscillations fournit l'énergie perdue par transfert thermique.

c. Vrai ou faux ? Dans un circuit RLC, l'énergie initialement stockée dans le condensateur initialement chargé va être intégralement transmise à la bobine.

d. Proposer un montage qui permette de visualiser les variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité dans un circuit RLC, en fonction du temps.

e. Dans un circuit RLC siège d'oscillations pseudo-périodiques, $L = 0,5$ H et on souhaite $T_0 = 10$ ms pour la pseudo-période des oscillations. Doit-on choisir $4,7\ \mu$F, 2,2 mF ou 1 mF pour la capacité du condensateur ?

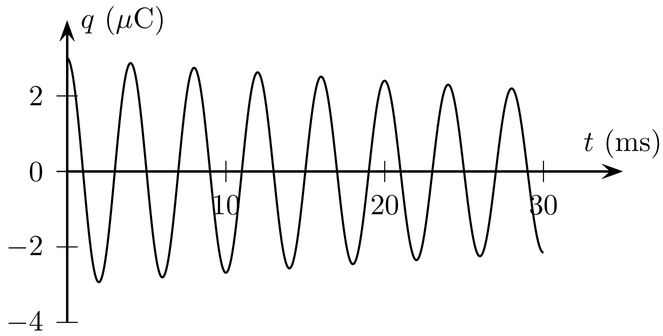
Oscillations pseudo-périodiques

$\boxed{13.2}$ N°9 p. 173 : Oscillations amorties

$\boxed{13.3}$ Oscillations libres amorties

Un oscillateur électrique libre est formé d'un condensateur initialement chargé, de capacité $C = 1,0\ \mu$F, d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine d'inductance $L = 0,40$ H et de résistance négligeable.

L'enregistrement de la tension aux bornes du condensateur a permis de tracer la courbe ci-dessous où q désigne la charge de son armature positive.



a. Déterminer la pseudopériode T des oscillations.

b. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ à chaque instant dans le cas où R est considérée comme nulle.

c. Vérifier qu'avec une période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, la fonction suivante :

$$q(t) = Q_{\mathrm{m}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

est solution de cette équation.

d. Calculer la période T_0 et comparer à la pseudo-période T.

e. Quelle différence présente la solution $q(t)$ trouvée par rapport à la courbe proposée ?

f. Quelle est la cause de cette différence ?

$\boxed{13.4}$ N°10 p. 174 : Oscillations électriques

Oscillations périodiques

$\boxed{13.5}$ Exercice résolu p. 171 : *LC*

$\boxed{13.6}$ N°13 p. 174 : Oscillations non amorties

$\boxed{13.7}$ N°14 p. 174 : Oscillations libres

Interprétation énergétique

$\boxed{13.8}$ N°17 p. 175 : Oscillations amorties

$\boxed{13.9}$ N°18 p. 175 : Équation différentielle

$\boxed{13.10}$ N°19 p. 175 : Étude expérimentale

Corrigé 13
Oscillations dans un dipôle RLC

$\boxed{13.1}$ À bâtons rompus

a. Faux. Si on quadruple la valeur de L, la pseudo-période est multipliée par deux (*confere* la formule de la pseudo période).

b. Vrai. L'énergie électrique perdue par effet Joule dans la résistance est convertie en énergie interne. Cette conversion provoque un transfert thermique vers l'extérieur de la résistance (celle-ci peut être brûlante !).

c. Faux. L'énergie initialement stockée dans le condensateur est transmise à l'ensemble bobine + résistance. Le transfert serait total uniquement si la résistance était nulle.

d. Se reporter au montage donné en cours, figure 12.5 page 4 ; la seule difficulté est que, dans ce montage, le condensateur et la résistance doivent avoir une borne commune reliée à la masse. En effet, les tensions sont mesurées par rapport à la masse par le système d'acquisition.
L'intensité dans le circuit se déduit de la mesure de la tension u_R aux bornes de la résistance, et de l'application de la loi d'Ohm :

$$i = \frac{u_R}{R}$$

e. Appliquons la formule donnant la pseudo-période des oscillations amorties :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\left(10 \times 10^{-3}\right)^2}{4 \times \pi \times 0,5} = 1,6 \text{ mF}$$

La valeur de 1 mF est, parmi celles qui sont proposées, la plus proche.

$\boxed{13.2}$ N°9 p. 173 : Oscillations amorties

1. La résistance est la plus grande dans le cas **(a)**. En effet, ce cas correspond aux oscillations libres les plus amorties.

2. La capacité la plus grande correspond au cas **(b)**. En effet, la pseudo-période, approximativement égale à la période propre du circuit LC correspond :

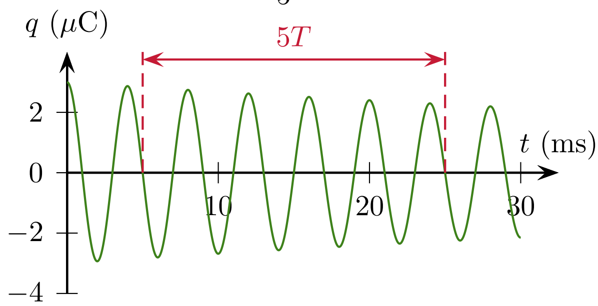
$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

est la plus grande.

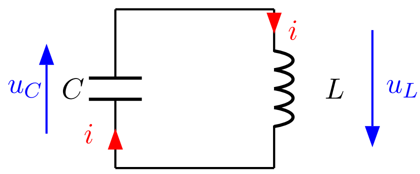
$\boxed{13.3}$ Oscillations libres amorties

a. Sur l'enregistrement, la durée qui sépare les instants de dates $t_1 = 5,0$ ms et $t_2 = 25,0$ ms correspond à cinq pseudopériodes. Ainsi :

$$T = \frac{25,0 - 5,0}{5} = 4,0 \text{ ms}$$



b. Si la résistance R est nulle, le schéma du circuit est celui de la figure ci-dessous.



D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C(t) + u_L(t) = 0 \tag{1}$$

Compte tenu des orientations choisies :

$$q(t) = Cu_C(t) \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

En reportant les résultats dans (1), on aboutit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0 \tag{2}$$

c. Dérivons deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}\mathbb{Q}_\mathrm{m} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \mathbb{Q}_\mathrm{m} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

Remplaçons dans l'équation différentielle (2) :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \mathbb{Q}_\mathrm{m} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{LC}\mathbb{Q}_\mathrm{m} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = 0$$

Cette expression est nulle si et seulement si :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Dès lors que cette condition satisfaite pour T_0, alors la solution proposée est bien solution de l'équation différentielle.

d. $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
$T_0 = 2 \times 3,14\sqrt{0,40 \times 1,0 \times 10^{-6}} = 4,0 \times 10^{-3}$ s

On a accord parfait entre la période propre T_0 calculée pour le circuit LC, et la pseudopériode T mesurée pour le circuit RLC (voir l'exercice N°11 p. 174 pour la différence entre T et T_0 ; ici la différence entre les deux est négligeable car l'amortissement est faible).

e. La solution est une fonction périodique (sinusoïde) alors que la courbe ne l'est pas puisque l'amplitude diminue au cours du temps. Les oscillations sont dites amorties.

f. L'amortissement des oscillations est dû à la dissipation d'énergie par effet Joule, notamment dans le conducteur ohmique.

13.5 Exercice résolu p. 171 : *LC*

13.6 N°13 p. 174 : Oscillations non amorties

1. Par « sens choisis habituellement », l'énoncé sous-entends une convention récepteur. Schéma identique à l'exercice **13.2**, question **b**.

2. Lien entre u_{B} et i : $u_{\mathrm{B}} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Lien entre u_{C} et i :

$$q = Cu_{\mathrm{C}} \text{ et } i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; i = C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} \qquad (3)$$

Lien entre u_{B} et u_{C} :

$$u_{\mathrm{B}} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2}$$

3. Loi d'additivité dans le montage : $u_{\mathrm{B}} + u_{\mathrm{C}} = 0$; On reporte dans l'expression précédente :

$$-u_{\mathrm{C}} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_{\mathrm{C}} = 0$$

4. On suppose comme solution :

$$u_C(t) = \mathbb{U}\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi_0\right)$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\mathbb{U}\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{1}{LC}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) = 0$$

Équation dite *de dispersion* valable $\forall t$ ssi la constante devant le cosinus est nulle :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Les conditions initiales sont un courant nul dans la bobine, et une tension $u_C(t=0) = u_0 = 6$ V. Par conséquent, $\mathbb{U} = u_0$ et $\varphi_0 = 0$:

$$u_C(t) = u_0\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$$

L'expression de $i(t)$ se déduit de l'équation (3) :

$$i(t) = -i_0\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) \quad \text{avec} \quad i_0 = \frac{2\pi}{T_0}u_0$$

13.8 N°17 p. 175 : Oscillations amorties

1. À l'instant initial, l'énergie du condensateur est :

$$E_{C_0} = \frac{1}{2}Cu_C^2$$
$$E_{C_0} = 0,5 \times 20 \times 10^{-6} \times 12^2 = 1,44 \text{ mJ}$$

Lorsque l'intensité passe à son maximum i_{m}, l'énergie est totalement transférée à la bobine :

$$E_{L_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{2}Li_{\mathrm{m}}^2 = 1,44 \text{ mJ}$$

$$i_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{L_m}}}{L}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,44 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-3}}} = 0,44 \text{ A}$$

2. L'énergie dissipée par effet Joule est égale à la différence entre l'énergie initiale E_{C_0} dans le condensateur et l'énergie $E_{L_{\max}}$ dans la bobine lorsque l'intensité passe par son premier maximum $i_{\max}$:

$$E_{\mathrm{J}} = E_{C_0} - E_{L_{\max}} = E_{C_0} - \frac{1}{2}Li_{\max}^2$$
$$E_{\mathrm{J}} = 0,44 - 0,5 \times 15 \times 10^{-3} \times 0,235^2$$
$$E_{\mathrm{J}} = 1,0 \text{ mJ}$$

13.9 N°18 p. 175 : Équation différentielle

a. Énergie de la bobine :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 \text{ et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; E_L = \frac{1}{2}LC^2\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}^2$$

b. Énergie du circuit :

$$E = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}^2$$

c. Conservation de l'énergie : $E = $ cte $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\Rightarrow \quad 2u_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \quad \text{Amazing, isn't it ?!}$$